ЛЕКЦИЯ 13.
Центральное поле.
Момент импульса.

А.И. Валишев, В.Г. Сербо .

24. Для замкнутой системы частиц сохраняются энергия + импульс. Существует еще один фундаментальный закон сохранения – закон сохранения момента импульса.

24.1. Векторное произведение.

Df. $\boldsymbol{C} = [\,\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\,] = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

A – вектор, ***B*** – вектор → ***C*** – результат = вектор!

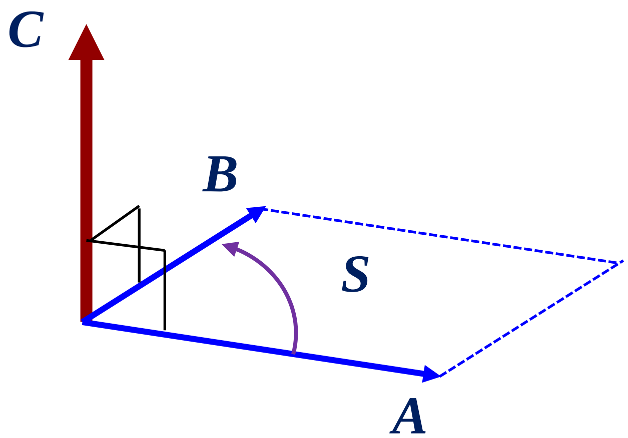
Свойства векторного произведения $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$:

1. $\boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{A}, \ \boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{B}$;
2. $|\,\boldsymbol{C}\,| = |\,\boldsymbol{A}\,| \cdot |\,\boldsymbol{B}\,| \cdot \sin(\angle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$;
3. Вращение от ***A*** к ***B*** против часовой стрелки.

C – правовинтовой вектор.

Следствие: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0$.

$|\,\boldsymbol{C}\,|$ = площадь параллелограмма, натянутого на вектора ***A***, ***B***.



24.1.1. Векторные произведения ортов.

$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = - \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_z$, $\quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = - \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_x$, $\quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = - \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_y$;

$[(A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z) \times (B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y + B_z \boldsymbol{e}_z)]_x = ? = C \cdot \boldsymbol{e}_x \quad - \quad \parallel \boldsymbol{e}_x$

Отберём слагаемые $\parallel \boldsymbol{e}_x \quad = (A_y \cdot B_z)\, \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z - (A_z \cdot B_y)\, \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z$,

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]_x = A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y \ .$$

x): $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_x = A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y$;

y): $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_y = A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z$.

z): $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_z = A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x$.

В компактной форме:

$$\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

Упражнение. **Показать:**

$$\left(\left[\vec{A}, \vec{B}\right] \cdot \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} .$$

Упражнение. **Показать:**

$$\left(\left[\vec{A}, \vec{B}\right] \cdot \vec{C}\right) = \left(\left[\vec{B}, \vec{C}\right] \cdot \vec{A}\right) = \left(\left[\vec{C}, \vec{A}\right] \cdot \vec{B}\right) .$$

Указание. Циклическая перестановка строк в определителе не меняет его величину.

Df. **Дифференцирование векторного произведения.**

Заданы векторные функции $\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{g}(t)$. **Найти** $\frac{d}{dt}\left[\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right]$.

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right] = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{g}\right] + \left[\vec{f}, \frac{d\vec{g}}{dt}\right] .$$

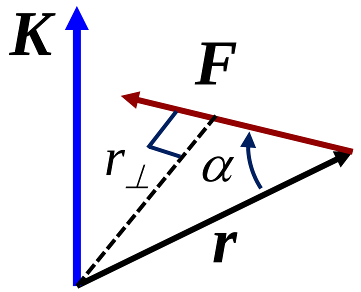
24.2 Момент силы.

Df. **Момент силы равен векторному произведению радиус - вектора частицы на силу.**

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \,;$$

$$|\,\boldsymbol{K}\,| = |\,\boldsymbol{r}\,| \cdot |\,\boldsymbol{F}\,| \sin\alpha = r_{\perp} |\boldsymbol{F}\,| \,.$$

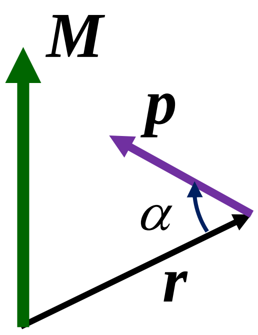
$r_{\perp}$ **- плечо силы.**



24.2.1 Момент импульса.

Df. **Момент импульса равен векторному произведению радиус - вектора частицы на импульс.**

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \,;$$



24.2.2 Основное уравнение динамики момента импульса.

«Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту силы.»

$$\frac{d}{dt}\vec{M} = \frac{d}{dt}\,\vec{r}\times\vec{p} = \dot{\vec{r}}\times\vec{p} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} =$$

$$= \cancel{m\vec{v}\times\vec{v}} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{K}\,.$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}\,.$$

24.2.3. Аналогия импульс ↔ момент импульса.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad \leftrightarrow \qquad \boxed{\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}\,.}$$

Вектор момента импульса не обладает трансляционной симметрией, *vs* вектору импульса.

Импульс частицы (системы частиц) инвариантен относительно смещения *(a)* начала отсчета системы координат.

Момент импульса не инвариантен!

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}, \quad \to \quad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}\,;$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}, \quad \to \quad \boldsymbol{M}' \neq \boldsymbol{M}\,!$$

24.2.4. Момент импульса в центральном поле.

Df. **Центральная сила - сила направленная вдоль радиус вектора из силового центра.** $\boldsymbol{F} \parallel \pm \boldsymbol{r}$.

Закон сохранения.

«Момент импульса в поле центральных сил СОХРАНЯЕТСЯ !»

Траектория частицы является плоской кривой,

т.к. $(\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{p})$.

Действительно:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}\,, \qquad \boxed{\vec{K} = \vec{r} \times \vec{F} = 0\,, \qquad \frac{d\vec{M}}{dt} = 0\,!}$$

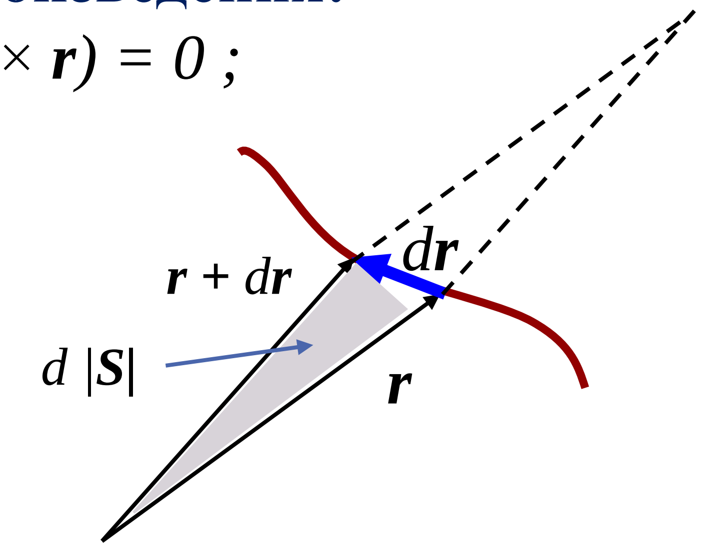
24.3. Секториальная скорость.

Согласно свойствам векторного произведения:

$\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \cdot d\mathbf{S}$, **т.к.** $(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0$;

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times d\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}) =$$

$$= \frac{1}{2m}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\vec{M}}{2m}.$$



Окончательно:

Df. **Секториальная скорость:**

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}),$$

Направление скорости перпендикулярно плоскости траектории (орбиты).

Df. **Момент импульса в поле центральных сил пропорционален секториальной скорости.**

$$\vec{M} = 2m\frac{d\vec{S}}{dt}.$$

$$\vec{M} = 2m\frac{d\vec{S}}{dt}.$$

24.4. Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы частиц.

Df. **Замкнутой называется система частиц, в которой действуют внутренние для этой выделенной системы силы. Внешних сил нет.**

Df. **Определим скорость изменения момента импульса системы частиц:**

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_i \vec{K}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \,.$$

Каждая сила на произвольную *i* –ю частицу создается силами со стороны всех остальных частиц - $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\Sigma}_{k,\, k \neq i} \boldsymbol{F}_{i,\, k}$.

Рассмотрим моменты сил, создаваемые попарными взаимными силами $\boldsymbol{F}_{ik}$ и $\boldsymbol{F}_{ki}$.

Покажем, что сумма парных моментов равна нулю:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{ki} = 0\,, \qquad \vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{ki} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} - \vec{r}_k \times \vec{F}_{ik} =$$

$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik} = 0\,.$$

Вектор $(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ параллелен вектору $\vec{F}_{ik}$, $(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \,||\, \pm \vec{F}_{ik} \rightarrow$

Отсюда:

$$\sum_i \vec{K}_i = 0\,, \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\vec{M}}{dt} = 0\,!$$

При условии неравенства нулю сумы моментов внешних сил:

$$\vec{K}_{\boldsymbol{external}} = \sum_i \vec{K}_{i,ext} \neq 0\,,$$

$$\boxed{\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}_{\boldsymbol{external}} \quad !\,.}$$

25. Движение в центральном поле (поле центральных сил).

В центральном поле интегралами движения (сохраняющимися величинами) являются энергия системы частиц E а также вектор момента импульса $\boldsymbol{M}$.

Рассмотрим движение частицы массы m в поле силового центра.

Известна потенциальная энергия взаимодействия частицы с силовым центром: $U(r)$. Тогда полная энергия:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = const \, ,$$

Момент импульса движущейся частицы (предполагаем для простоты масса силового центра много больше массы частицы):

$$\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{v} = \overrightarrow{const} \, .$$

Удобно направить декартову ось z в направлении вектора момента импульса $\boldsymbol{M}$. В таком случае орбита частицы лежит в плоскости x, y .

25. Движение в центральном поле (поле центральных сил).

Удобно направить декартову ось z в направлении вектора момента импульса $\boldsymbol{M}$. В таком случае орбита частицы лежит в плоскости x,y .

В плоском движении $\vec{v} = (v_r\,, v_\varphi) = (\dot{r}\,, r\dot{\varphi})$. Получаем:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2\right) + U(r) = const\,,$$

$$M = M_z = mr \cdot r\dot{\varphi} = const\,.$$

Нетрудно преобразовать закон сохранения энергии в одномерное, зависящее только от модуля радиус – вектора r соотношение:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\left(mr^2\dot{\varphi}\right)^2}{mr^2} + U(r) =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{(M)^2}{mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = const\,,$$

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \qquad (\boldsymbol{X})$$

Получено одномерное, зависящее только от модуля радиус – вектора *r* соотношение:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\left(mr^2\dot{\varphi}\right)^2}{mr^2} + U(r) =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{(M)^2}{mr^2} + U(r) = const\ ,$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r)\ ,$$

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}\ . \qquad (X)$$

25.1 Траектория частицы.

Из уравнения *(X)* находим:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]}, \qquad \dot{r} >,< 0\,.$$

$$dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\cdot \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}\,. \quad (tr)$$

В предыдущих лекциях рассмотрено одномерное движение. Здесь рассматривается зависимость $t = t(r)$.

Интегрирование при начальных данных $t = t_0$, $r = r_0$ **дает** $t = t(r)$ **:**

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\cdot \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}} + t_0\,.$$

25.1 Траектория частицы. (продолжение).

Сделаем замену переменных используя закон сохранения момента импульса:

$$M = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = const\ ;$$

$$dt = \frac{mr^2}{M}\, d\varphi\ , \qquad \rightarrow$$

Воспользуемся формулой *(tr)* **:**

$$\rightarrow \quad dt = \frac{mr^2}{M}\, d\varphi = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}\ ,$$

$$d\varphi = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{M}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}\ ;$$

$$\varphi(r) = \pm\frac{M}{\sqrt{2m}} \cdot \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{eff}(r)}} + \varphi_0\ .$$

Найдена зависимость угла $\varphi = \varphi\,(r)$ **в плоской, полярной системе координат от радиуса** r **на траектории (орбите) частицы.**

26. Задача Кеплера.

Рассматривается движение частицы массы m в поле тяготения массивного точечного силового центра. Потенциальная энергия частицы в кулоновском поле (поле тяготения, а также электростатическом поле)

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} .$$

Коэффициент α :

$\alpha = G\, m_E \cdot M_{Sun}$ – **Земля в поле тяготения Солнца;**

$\alpha = k \cdot e^2$ - **электрон в поле протона (атом водорода).**

e – **заряд электрона.**

26.1. Эффективный потенциал в кулоновском поле:

$$U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} .$$

Поведение потенциала U_{eff} при $r \to \infty$, $r \to 0$.

$$U_{eff}(r \to \infty) \propto -1/r , \quad U_{eff}(r \to 0) \propto 1/r^2$$

26. Задача Кеплера.

Классификация орбит (см. график).

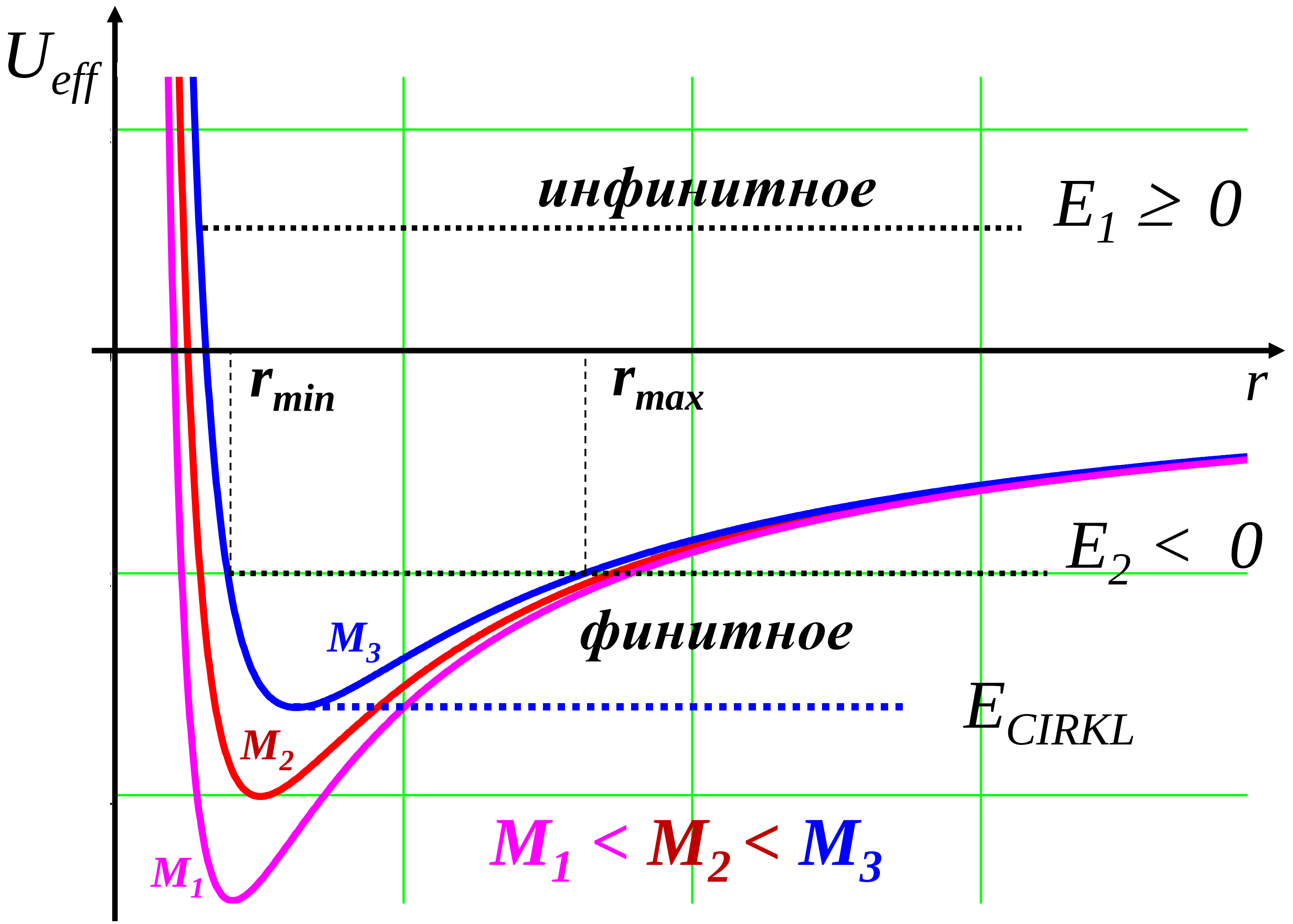
$E_1 \geq 0$ **движение инфинитно, одна точка поворота** $r \geq r_1$ **.**
Отражение при наименьшем радиусе r_1 **;**

$E_2 < 0$ **движение финитное, две точки поворота, движение в диапазоне радиусов**

$$r_{min} < r < r_{max}\,.$$

26.1. Эффективный потенциал.

$$U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}\ .$$



26.1. Вид траектории.

Выполняется интегрирование при определенном $U_{eff}(r)$ **:**

$$\varphi(r) = \pm\int \frac{M}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} + const\,.$$

Введем параметр орбиты p **, и безразмерную переменную** $u = p/r$

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}\,, \qquad u = \frac{M^2}{m\alpha r}\,,$$

$$du = -\frac{M^2}{m\alpha r^2}dr\,, \qquad dr = -\frac{m\alpha r^2}{M^2}du\,;$$

$$\varphi(r) = \pm\int \frac{du}{\frac{M}{m\alpha}\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} + C =$$

Выполнив замены имеем:

$$= \mp\int \frac{du}{\sqrt{e^2 - (u-1)^2}} + C\,. \qquad e^2 = 1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}\,. \qquad (***)$$

26.1. Вид траектории.

Получено:

$$\varphi(r) = \mp\int \frac{du}{\sqrt{e^2-(u-1)^2}} + C\,. \qquad (***)$$

Введен безразмерный эксцентриситет орбиты e **:**

$$e = \sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}\,.$$

Интеграл (***) является табличным:

$$\varphi(r) = \pm\arccos\frac{u-1}{e} + C\,;$$

26.1.1 Представление явной зависимости $r(\varphi)$.

Обращая $\varphi(r)$ находим:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\varphi - C)} .$$

Выберем начало отсчета угла $\varphi = 0$ при $r = r_{min}$.
Если при $r = r_{min}$ $\varphi = 0$ то $C = 0$.
Тогда уравнение траектории приобретает вид:

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\varphi} .}$$

Здесь p - параметр орбиты можно определить как:

$$p = r\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{M^2}{m\alpha} .$$

26.1.1 Представление явной зависимости $r(\varphi)$.

Зависимости $r(\varphi)$ при различных параметрах p, e выражают кривые, которые являются коническими сечениями.

	Эксцен-трисистет, e	Denom	E	r_{min}	r_{max}	*Вид Траектории*
1	$e < 1$	$1+e\cdot\cos\varphi > 0$	$E < 0$	$p/(1+e)$	$p/(1-e)$	***Эллипс***
1a	$e = 0$	1	$E_{CIRKL} =$ $= -m\alpha^2/2M^2$	p	p	***Окружность***
2	$e = 1$	$1+\cos\varphi \geq 0$	$E = 0$	$p/2$	∞	***Парабола***
3	$e > 1$	$1+e\cdot\cos\varphi \geq 0$	$E > 0$	$p/(1+e)$	∞	***Гипербола***

26.2. Законы Кеплера.

Рассматриваются эллиптические планетарные орбиты.

1-й закон К.
«Все планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых расположено Солнце».

2-й закон К.
«За равные интервалы времени радиус – вектор планеты заметает одинаковые площади».

3-й закон К.
«Отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси орбиты для всех планет одинаково».

26.2. Законы Кеплера.

Упражнение.

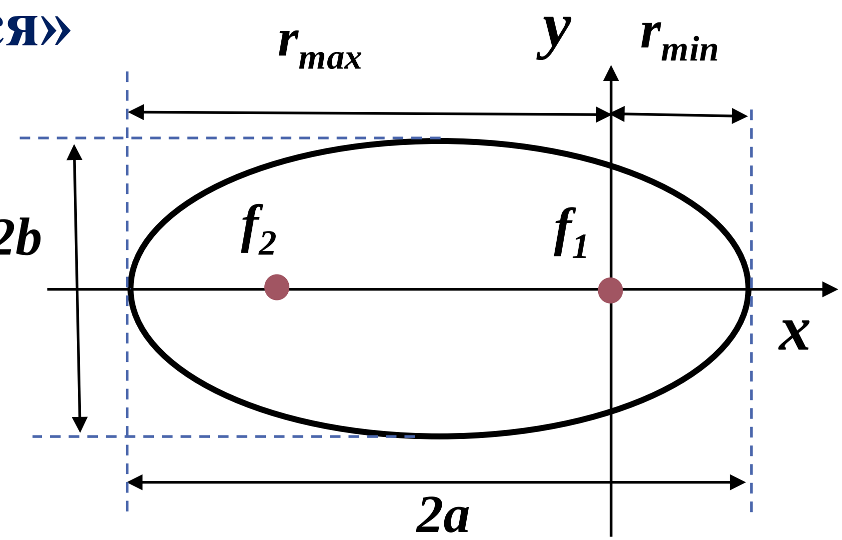
Доказать $r_{min} = (1- e)a, \quad r_{max} = (1+ e)a, \quad p = (1- e^2)a$;

a – **большая полуось эллипса,** b – **малая полуось.**

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Доказательство 3-го закона Кеплера.

За период обращения T **«заметается» вся площадь эллипса:** $S = \pi ab$.



$$S = \frac{dS}{dt}T = \frac{M}{2m}T =$$

$$= \pi ab = \pi \cdot \frac{\alpha}{2|E|} \cdot \frac{M}{\sqrt{2m|E|}};$$

$$T = 2\pi \frac{abm}{M} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}, \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{G\, m_{Sun}}.}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

http://phys.nsu.ru/fit

http://el.nsu.ru